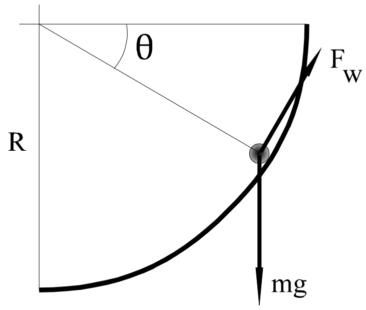
TENTAMEN MECHANICA **24 augustus 2004** **tijd: 14:00 - 17:00 uur**

MAAK **ELKE OPGAVE** OP EEN **APART BLAD** voorzien van je **naam** en **studentnummer**

$$Cijfer = \frac{1}{3}\sum punten + 1$$

Opgave 1. Glijbaan

Een puntvormige massa m glijdt langs een cirkelvormige goot. Afgezien van de zwaartekracht, ondervindt de massa daarbij een constante wrijvingskracht F_W tegengesteld gericht aan de bewegingsrichting ter grootte: $F_W = \frac{1}{2}mg$



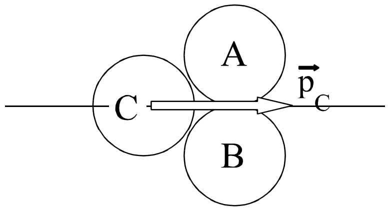
2p ☐ a. Bereken de hoekversnelling $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ als functie van de hoek θ.

2p ☐ b. Laat zien dat de snelheid van de massa maximaal is als $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4p ☐ c. Bereken de maximale snelheid als de massa vanuit stilstand bij $\theta = 0$ wordt losgelaten.

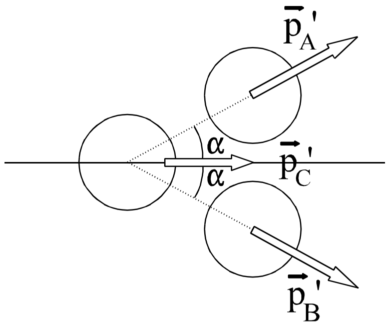
Opgave 2. Snooker

Op een Snooker tafel liggen twee (identieke) ballen A en B tegen elkaar. Een derde bal C (identiek aan A en B) wordt daar tegenaan geschoten met een impuls $\vec{p}_C$ en raakt beide ballen tegelijkertijd.



2p ☐ a. Bepaal de hoek α waaronder de ballen A en B weggeschoten worden.

2p ☐ b. Geef het verband tussen de impuls $\vec{p}_C$ vóór de botsing en de impulsen $\vec{p}_A{}'$, $\vec{p}_B{}'$ en $\vec{p}_C{}'$ nà de botsing.

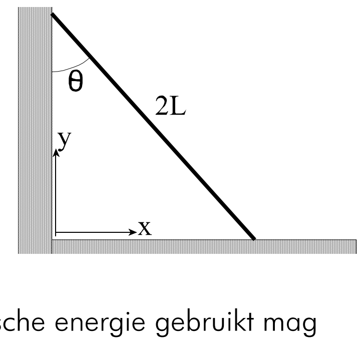


Neem aan dat na de botsing bal C blijft liggen.

4p ☐ c. Bereken welk deel van de oorspronkelijke kinetische energie bij de botsing verloren is gegaan.

Opgave 3. Vallende lat

Vanuit (vrijwel) verticale stand begint een homogene lat met een lengte $2L$ en massa m te glijden, waarbij het ene uiteinde langs een gladde wand gaat en het andere uiteinde over een gladde vloer beweegt. Neem een rechthoekig coördinatenstelsel met als oorsprong het hoekpunt van de muur en de vloer.



2p ☐ a. Geef de x,y-coördinaten van het zwaartepunt als functie van de hoek θ.

2p ☐ b. Geef aan waarom in deze situatie de wet van behoud van mechanische energie gebruikt mag worden.

3p ☐ c. Laat met een berekening zien dat voor de hoeksnelheid geldt:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos(\theta))} = \sqrt{\frac{3g}{L}}.\sin(\frac{\theta}{2})$$

De oplossing voor de differentiaal-vergelijking uit c) kan geschreven worden als: $\tan(\frac{\theta}{4}) = a.e^{bt}$

4p ☐ d. Bereken de tijd die verstrijkt tussen het tijdstip t_1 dat de lat een hoek $\theta = \frac{\pi}{4}$ met de muur maakt en het tijdstip t_2 dat de lat op de grond ligt, uitgedrukt in L en g.

1a. $mR\ddot{\theta} = mg\cos(\theta) - F_w \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{R}(\cos(\theta) - \frac{1}{2})$

b. hoeksnelheid is maximaal als versnelling (of kracht) nul is: $\cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

c. Er geldt dan: $\frac{1}{2}mR^2\theta'^2 = mgR\sin(\theta) - F_w R\theta \quad \rightarrow$

$$v = R\theta' = \sqrt{gR(2\sin(\theta) - \theta)} = \sqrt{gR(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})} = 0{,}83\sqrt{gR}$$

2a. $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b. $\vec{p}_C = \vec{p}_C^{\,\prime} + \vec{p}_A^{\,\prime} + \vec{p}_B^{\,\prime}$

c. $\vec{p}_C = \vec{p}_A^{\,\prime} + \vec{p}_B^{\,\prime}$ *met* $|\vec{p}_A^{\,\prime}| = |\vec{p}_B^{\,\prime}| = p' \quad \rightarrow \quad p' = \frac{p_C}{2\cos(\alpha)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}p_C$

zodat: $\Delta K = \frac{1}{2m}(p_C^2 - 2p'^2) = \frac{p_C^2}{2m}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\frac{p_C^2}{2m}$

Er gaat dus 1/3 deel verloren.

3a. $x_{CM} = L\sin(\theta)$ en $y_{CM} = L\cos(\theta)$

b. De enige kracht die arbeid verricht is de zwaartekracht en dat is een conservatieve kracht.

c. Energiebehoud: $mgL = mgL\cos(\theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 + \frac{1}{2}I\theta'^2$ met $I = \frac{1}{3}mL^2$

Hieruit volgt: $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos(\theta))} = \sqrt{\frac{3g}{L}}.\sin(\frac{\theta}{2})$

d. Invullen levert: $b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}$.

Tevens geldt: $\tan(\frac{\pi}{16}) = 0{,}1989 = a.e^{bt_1}$ en $\tan(\frac{\pi}{8}) = 0{,}4142 = a.e^{bt_2}$

zodat: $t_2 - t_1 = \frac{1}{b}\ln(\frac{0{,}4142}{0{,}1989}) = 0{,}85.\sqrt{\frac{L}{g}}$